

دراسة تحليلية للتغيرات الفضائية والزمانية لخصائص انتشار نبضة الليزر في عملية التوليد التوافقي الثاني

خولة صلاح خشان

تاريخ التسلم: ٢٠٠٤/١١/٤

تاريخ القبول: ٢٠٠٥/٣/١٥

الخلاصة

في هذه الدراسة، جرى تقديم معالجة رياضية ونتائج عددية لحل المعادلات اللاخطية التي تصف انتشار نبضات الليزر القصيرة في وسط بصري لاخطي لغرض تحقيق عملية التوليد التوافقي الثاني. تهدف الدراسة إلى التعرف على تأثيرات التغيرات الفضائية والزمانية في هذه العملية والتي تسبب تضيق نبضة الليزر مع انتشارها داخل البلورة اللاخطية. يمكن اعتبار هذه الدراسة بداية لتحليل يستند إلى نتائج تجريبية أوسع لعملية التوليد التوافقي الثاني باستخدام نبضات الليزر إذ إن التطبيقات الصناعية والبحثية لهذا المبدأ أخذت بالازدياد بشكل كبير مؤخراً.

Analytical Investigation of the Spatial and Temporal Changes during Laser Pulse Propagation in the Second Harmonic Generation

Abstract

In this investigation, a mathematical treatment, as well as numerical results, for the nonlinear equations describing the propagation of short laser pulses during the second harmonic generation was presented. This investigation aims to introduce the effects of spatial and temporal changes in such process that may cause the laser pulse to be narrowed as it propagates through the nonlinear crystal. This study can stimulate a wider experimental analysis of the second harmonic generation using laser pulses since its applications are increasing recently.

المقدمة

اهتماماً كبيراً باليات تضيق عرض النبضة الناتجة عن عملية التوليد التوافقي الثاني من خلال اهتمامهم بتقليل الفروقات الزمنية ما بين النبضات المتتالية [1-15]. يتم تناول عملية تضيق الفروقات هذه على فرض أن الموجات الأساس (Fundamental) والمتولدة تكون مستوية (Plane) وذلك لتبسيط المعالجات الرياضية والبصرية

يعتبر التوليد التوافقي الثاني أول التأثيرات البصرية اللاخطية التي تم اكتشافها مباشرة بعد تشغيل ليزر الياقوت عام 1960 وقد استحوذ هذا التأثير على اهتمام عدد هائل من البحوث والدراسات بسبب كثرة التطبيقات الطيفية والصناعية له. خلال التسعينيات من القرن الماضي أولى الباحثون

* وحدة أبحاث الليزر/قسم العلوم التطبيقية/الجامعة التكنولوجية

يكون تاماً. تنشأ التغيرات الفضائية في تركيب النبضة أساساً من حيود الحزمة الضوئية المتفاعلة مع الوسط البصري اللاخطي (البلورة اللاخطية) عند انتقالها خلال هذا الوسط. فيما ينشأ التغيرات الزمانية من التأخير (Delay) الحاصل ما بين النبضات بفعل التأثيرات اللاخطية المتبادلة ما بين الشعاع والمادة.

التحليل الرياضي

يعطى المجال الكهربائي للموجة الكهرومغناطيسية المتفاعلة مع وسط بصري لاخطي كالآتي:-

$$E(r, z, t) = \hat{e} E_0(r, z, t) \exp(ikz - i\omega t) \quad (1)$$

حيث (r) إحداثي الموقع القطبي داخل الوسط و (z) الإحداثي الفضائي الذي يفترض إن اتساع النبضة يكون باتجاهه و (t) زمن اجتياز الموجة الكهرومغناطيسية للوسط و (\hat{e}) متجه استقطاب الموجة الكهرومغناطيسية داخل الوسط و (k) العدد الموجي (Wave Number) و (ω) التردد الزاوي للموجة الكهرومغناطيسية. يمكن أن تتضمن المعادلة (1) من الناحية النظرية العديد من المركبات الموجية التي تتباين في قيمة التردد الزاوي (ω) والعدد الموجي (k) و متجه الاستقطاب (\hat{e}) ، وهذه المركبات تمثل التردد الأساس وترددات توافقية ذات مراتب أعلى. على فرض أن عملية التوليد التوافقي تتضمن تردداً أساس (ω_1) وترددين (ω_2) و (ω_3) ، فإن المعادلة (1) يمكن أن تكتب كالآتي:

لعملية التوليد التوافقي الثاني والثالث، أما إذا أُريد تحليل التوليد التوافقي الأعلى من ذلك فإن هذا الفرض يفشل تماماً في المعالجة الرياضية على الرغم من تحقيقه عملياً في التحليلات الفيزيائية والبصرية [7-8].

لقد تناولت الدراسات والبحوث السابقة عملية تضيق النبضات الناتجة عن التوليد التوافقي الثاني اعتماداً على التأثيرات المرتبطة بالتوزيع المستعرض (Transverse) لتلك النبضات واعتبرته أهم خصائص هذه النبضات تأثيراً فيما لم يحصل الباحث على أية دراسة تتناول مشكلة النوعية البصرية للنبضات المتولدة والتي تعد مهمة جداً في العديد من التطبيقات العملية للتوليدات التوافقية. إضافة إلى ذلك فإن معظم الدراسات والبحوث السابقة في هذا المجال اعتمدت في إنجاز تحليلاتها الرياضية على تحويلات فورير بأنواعها الأمامية (FT) (Fourier Transformations) والسريعة (Fast Fourier Transformations) والعكسية (Inverse Fourier Transformations) (IFFT) لحل المعادلات التي تصف هذه العملية. وإن تحويلات فورير هي لمعالجات رياضية صرفة لا تهتم بشكل كامل بالجوانب البصرية للعملية والمشكلات المرتبطة بها [7, 11, 14]. في هذه الدراسة، جرى تقديم معالجة رياضية عديدة لحل المعادلات اللاخطية التي تصف عملية التوليد التوافقي الثاني مع الأخذ بنظر الاعتبار التغيرات الفضائية (Spatial) والزمانية (Temporal) التي تطرأ على النبضات المتولدة خلال العملية التي يفترض أن تتم تحت شرط حفظ الطاقة أي إن التبادل الطافي ما بين التذبذبات التوافقية

وكذلك بلورات لاقطية ذات معاملات دقيقة، لذلك يمكن إعادة كتابة المعادلة (2) بالشكل الآتي [6]:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{i}{2k_1} \Delta E_1 + i \frac{g_1}{g_2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \frac{\alpha_1}{2} E_1 = i \sigma_1 E_2^* E_3 \exp(i \Delta k_1 z) \quad (5)$$

حيث Δ دالة لابلاس الاتجاهية التي تصف الحبيود داخل البلورة و g معامل التشتت المعتمد على سرعة المجموعة (1) و α معامل الامتصاص في جميع الاتجاهات أو الاحداثيات الفضائية.

لغرض تقديم مناقشة ذات منحى فيزيائي للعملية فإنه يتوجب تعريف بعض المقادير التي تصف كفاءة التحويل (Conversion Efficiency) والتغيرات الحاصلة في النوعية البصرية للنبضات المشاركة في عملية التوليد التوافقي.

تعطى الشدة البصرية المعتمدة على الموضع والزمن لنبضة ليزر كالآتي:

$$I(r, z, t) = \frac{nc}{8\pi} |E(r, z, t)|^2 \quad (6)$$

وإن القدرة البصرية لنبضة الليزر تعطى كالآتي:

$$P(z, t) = 2\pi \int_0^{\infty} I(r, z, t) r dr \quad (7)$$

وتعطى كثافة الطاقة (Energy density) كالآتي:

$$H(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} I(r, z, t) dt \quad (8)$$

$$E(r, z, t) = \hat{e}_1 E_1 \exp(ik_1 z - i\omega_1 t) + \hat{e}_2 E_2 \exp(ik_2 z - i\omega_2 t) + \hat{e}_3 E_3 \exp(ik_3 z - i\omega_3 t) \quad (2)$$

استناداً الى تحليلات ومعادلات شرودنجر اللاخطية (NLSE) التي تصف معاملات الموجة الكهرومغناطيسية في الفضاء وفي مدى الزمن والاقتران ما بينهما، يمكن الحصول على صياغة تفاضلية للمعادلة (2) وكالآتي:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{v_1} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= i \sigma E_2^* E_3 \exp(ikz) \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{v_2} \frac{\partial E_2}{\partial t} &= i \sigma E_1^* E_3 \exp(ikz) \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} + \frac{1}{v_3} \frac{\partial E_3}{\partial t} &= i \sigma E_1^* E_2 \exp(ikz) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

حيث (n) هو معامل انكسار الوسط و $(\omega = dk/d\omega)$ هي سرعة المجموعة (Group velocity) للحرمة الضوئية داخل الوسط و σ هو معامل الاقتران اللاخطي ما بين المركبات (أو النبضات) ويعطى كالآتي:

$$\sigma = \frac{4\pi\omega}{nc} \quad (4)$$

أثبتت الدراسات والبحوث الحديثة [6-15] أن المعادلة (3) تصح عند اهمال تأثيرات الحبيود (Diffraction) والتشتت (Dispersion) والامتصاص (Absorption) التي تعانها الموجة الكهرومغناطيسية عند مرورها خلال وسط بصري لاقطي والحقيقة أن هذه التأثيرات أو بعضها لا يمكن إهمالها عند تحقيق عملية التوليد التوافقي الثاني باستخدام حرمة ليزر ذات طاقة عالية

حيث

$$X = \frac{1}{\int_0^{\infty} |E|^2 r dr} \quad (12a)$$

$$\Psi = \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 r dr \cdot \int_0^{\infty} |E|^2 r^3 dr \quad (12b)$$

$$\Phi = \frac{1}{4} \left| \int_0^{\infty} r^2 \left[\frac{\partial E}{\partial r} E^* - E \frac{\partial E^*}{\partial r} \right] dr \right|^2 \quad (12c)$$

إذا كانت حزمة أو (نبضة) الليزر تنتشر خلال وسط (أو أوساط) بصرية تخضع لقانون مصفوفة ABCD البصرية فإن قيم معامل انتشار الحزمة $M^2(t)$ المعتمد على الزمن لا تكون ثابتة عند لحظات زمنية مختلفة [12] وبالتالي فإن قيمة القدرة اللحظية (Instantaneous) لنبضة الليزر $P(t)$ لن تكون ثابتة أيضاً. بناءً على ذلك، فإنه يتم اعتماد قيمة المعدل ما بين قيم $M^2(t)$ وكالاتي:

$$\langle M^2(t) \rangle = \frac{\int M^2(t) P(t) dt}{\int P(t) dt} \quad (13)$$

وهذه القيمة تعتبر دالة معيارية (Normalized) تصف علاقة القدرة البصرية لحزمة الليزر بخصائص انتشارها في وسط بصري لا خطي، وهي تمثل الاستنتاج الأكثر أهمية لهذه الدراسة.

النتائج والمناقشة

لغرض إجراء معالجة تحليلية ومن ثم الحصول على نتائج عددية تدعم هذه الدراسة فقد جرى الاعتماد على نتائج المصدر [4]. في هذا المصدر جرى تحقيق التوليد التوافقي الثاني باستخدام

فيما تعطى الطاقة الكلية لنبضات الليزر المساهمة في العملية كالاتي:

$$W(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(z,t) dt \quad (9)$$

إن جميع هذه المقادير الفيزيائية تتغير على طول المحور (z) بسبب التأثيرات المتبادلة (Interactions) في الأوساط البصرية اللاخطية. يمكن حساب كفاءة تحويل الطاقة في عملية التوليد التوافقي التي تتضمن تردداً أساس وترددين توافقيين كالاتي:

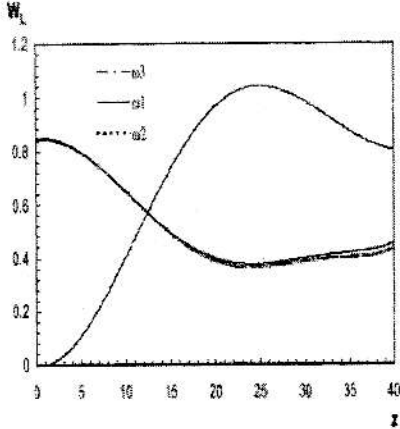
$$\eta(z) = \frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2} \quad (10)$$

تتضمن عملية التوليد التوافقي انتشار الحزمة الضوئية خلال وسط بصري لا خطي مع مجموعة من الأجزاء البصرية (العدسات والمرايا) التي تضبط اتجاه انتشار الحزمة وكذلك بعض الخصائص البصرية لها. تتطلب القياسات العملية لمعامل انتشار الحزمة البصرية (M^2) قياس أو تحديد دالة توزيع كثافة الطاقة بعد اجتياز الحزمة لعدسة افتراضية في عدد من المستويات العمودية على اتجاه انتشار الحزمة الضوئية فضائياً [8]. أما حساب معامل انتشار الحزمة (أو نبضة الليزر) المعتمد على الزمن $M^2(t)$ عند لحظة معينة فإنه يتطلب معرفة توزيع دالة المجال الكهربائي $E(r,z,t)$ في مستوي الأحداثي (z) [9].

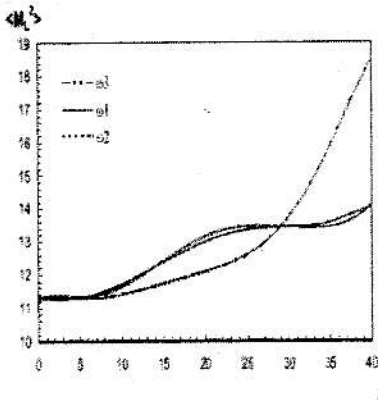
إذا كانت حزمة الليزر متناظرة محورياً (Axially) فإن معامل انتشار الحزمة المعتمد على الزمن $M^2(t)$ يعطى كالاتي [10]:

$$M^2(t) = X \sqrt{\Psi - \Phi} \quad (11)$$

تكون كاوسية أيضاً من الناحية التحليلية وهذا ما يميز التفاعل اللاخطي ما بين الليزر والمادة.



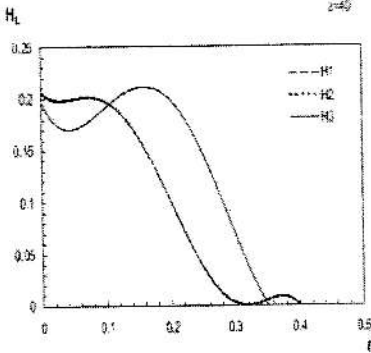
شكل (1) تغير الطاقة الكلية لنبضات الليزر الثلاث المشاركة مع تغير الاحداثي الفضائي (z)



شكل (2) تغير الدالة المعيارية لمعامل انتشار الحزمة الضوئية مع تغير الاحداثي الفضائي (z)

تتغير كثافة طاقة حزمة الليزر مع الاحداثي الفضائي (z) وفقاً لتغير الشدة البصرية، إلا أن تغير كثافة الطاقة

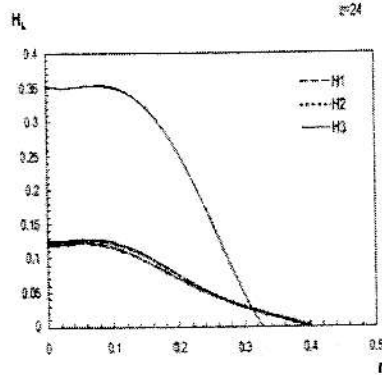
نبضات قصيرة من ليزر النديميوم- زجاج ذي الطول الموجي ($1.053\mu\text{m}$) وشدة بصرية تصل إلى حوالي ($100\text{GW}/\text{cm}^2$) وإن هذه النبضات مفصولة عن بعضها بفاصلة زمنية محددة تقوم بتأخير (Delay) النبضات المشاركة في العملية. كما جرى استخدام القيم الابتدائية للاحداثي القطبي ($r_0=2\text{cm}$) والاحداثي الفضائي ($z_0=0.2019\text{mm}$) والاحداثي الزمني ($t_0=1\text{ps}$). الشكل (1) يوضح تغير الطاقة الكلية لنبضات الليزر الثلاث المشاركة في العملية مع تغير الاحداثي الفضائي (z) الذي يفترض إن نبضة الليزر تنتشر به وفقاً للمعادلة (9). من الشكل يتضح أن أقصى قيمة لكفاءة التحويل تتحقق عند قيمة إحداثي (z) تقع ضمن المدى (0-40). كذلك فإن المركبة الثالثة (ω_3) تصل أعلى قيمة للطاقة مقارنة بكلتا المركبتين الأخرين وهذا ربما ينجم عن تهيئة طاقة تعملها النبضة الأساس والنبضة الثانية قبل وصول النبضة الثالثة إلى موقع الاحداثي الفضائي (z) نفسه حيث تكون خصائص الوسط البصري اللاخطي قد تغيرت عن الحالة الابتدائية التي استقبل بها نبضة الليزر الأساس. يوضح الشكل (2) تغير الدالة المعقومة لمعامل انتشار الحزمة الضوئية مع تغير الاحداثي الفضائي (z) وكما في الشكل (1) فإن معامل انتشار النبضة الثالثة يختلف بشكل كبير عن سابقتها وقد يكون السبب هو نفسه الذي فسر منحنيات الشكل (1)، كذلك فإن قيمة معامل انتشار النبضة الثانية لا تختلف كثيراً عن قيمته للنبضة الأساس وكما هو معلوم فإن حزمة الليزر الأساس تكون ذات توزيع كاوسي (Gaussian) لذلك يمكن القول أن نبضة التوافقي الثاني



شكل (4) تغير كثافة الطاقة مع (H_L) الاحداثي القطبي (r) عند موضع $(z=40)$

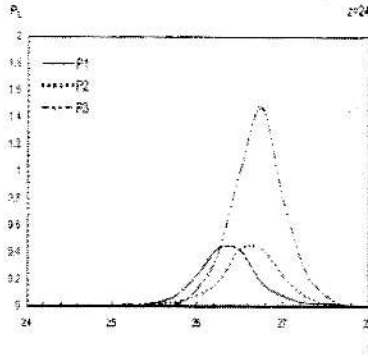
لغرض التعرف على سلوك القدرة (P_L) والشدة (I_L) مع تغير الاحداثي الزمني (t) عند موضعين فضائين مختلفين $(z=24,40)$ ، فقد جرى استخدام المعادلتين (6) و (7) للحصول على الأشكال البيانية (5-8). إن الإشكال الأربعة تخضع لتوزيع كاوسي يختلف من حيث قيمة القدرة أو قيمة الشدة وكذلك الاحداثي الزمني الذي يتم تحقيق ذروة الدالة عندها. كذلك يتضح تأثير الانتشار عند موقع فضائي أبعد في تضيق دالة القدرة (P_L) أو الشدة (I_L) المعتمدين على الزمن، لكن ذلك يتم بالتأكيد على حساب تقليل قيمة كفاءة التحويل. مما لا شك فيه أن النبضات الثلاث تجتاز الوسط البصري مع فروقات زمنية واضحة في الإشكال الأربعة.

يكون أكثر حساسية لتغير الاحداثي القطبي (r) طالما أن حزمة الليزر ذات التوزيع الكاوسي تجتاز الوسط البصري (البلورة اللاخطية) فضائياً بمقطع عرضي دائري الشكل، لذا فقد تم تمثيل العلاقة ما بين كثافة الطاقة (H_L) والاحداثي القطبي (r) وكما في الشكل (3) اعتماداً على المعادلة (8). ومرة أخرى تتقارب النبضة الأساس ونبضة التوافقي الثاني في سلوكها فيما تختلف النبضة الثالثة عنهما وهذه الأخيرة تمتلك قيمة أعلى لكثافة الطاقة عند موقع الاحداثي الفضائي (z) الذي تم عنده الحصول على أعلى قيمة لكفاءة التحويل ما بين الترددات التوافقية $(z=24)$. فيما تقل كثافة الطاقة للنبضات الثلاث عند موقع فضائي آخر $(z=40)$ مع سلوك مشابه لما تم تقديمه في الشكل (3) وهذه الحالة يبينها الشكل (4).

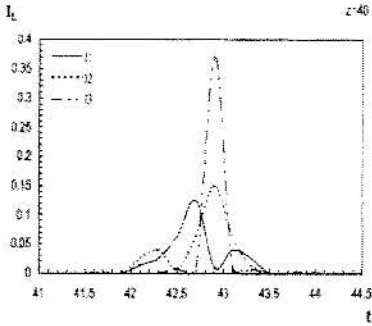


شكل (3) علاقة كثافة الطاقة (H_L) بالاحداثي القطبي (r) عند موضع $(z=24)$

إن تحقيق شرط حفظ الطاقة لعملية التوليد التوافقي يحدد مقدار الدقة أو نسبة الخطأ في الحسابات التي يتم إجراؤها فيما أثبتت الدراسات والبحوث السابقة أن عدم الأخذ بنظر الاعتبار شرط حفظ الطاقة يزيد نسبة الخطأ بشكل كبير ولا يتوافق مع الحلول العددية المعتمدة على النتائج العملية حتى في حالة التوليد التوافقي الثاني. لقد أثبتت الدراسات الحديثة أن المعالجات الرياضية والتحليلية يجب أن تتم بنسبة خطأ لا تتجاوز (1%) من أجل تقديم وصف أقرب ما يكون للحقيقة في هذه العملية [2, 7-8, 11, 14].

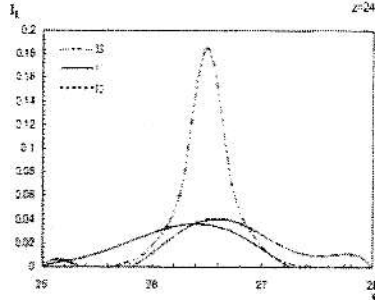


شكل (5) تغير القدرة (P_1) مع تغير الاحداثي الزمني (t) عند موضع ($z=24$)

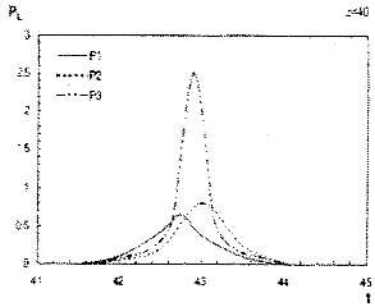


شكل (8) تغير القدرة (I_1) مع تغير الاحداثي الزمني (t) عند موضع ($z=40$)

بناءً على ذلك، فإن انتشار نبضة الليزر إلى مسافة أطول داخل البلورة اللاخطية يؤشر بداية حدوث انتقال طاقة ذي اتجاه عكسي، أي من التوافقي الثاني إلى المتذبذب الأساس [11] وكما يبين الشكلان (7) و (8)، فإن أمد نبضة التوافقي الثاني والنبضة الثالثة يقل وذلك بسبب حدوث تشويه فضائي وزماني للنبضتين فيما تزداد قيمة



شكل (6) تغير القدرة (I_1) مع تغير الاحداثي الزمني (t) عند موضع ($z=24$)



شكل (7) تغير القدرة (P_1) مع تغير الاحداثي الزمني (t) عند موضع ($z=40$)

والطيفية للتوليدات التوافقية أخذة بالتزايد مع استمرار تطور تقنيات الليزر ذات النبضات القصيرة.

معامل انتشار الحزمة الذي يرتبط بدوره بالنوعية البصرية للحزمة.

الاستنتاجات

استناداً الى النتائج المستحصلة، فإن عملية التوليد التوافقي الناتجة عن إمرار نبضة ليزر قصيرة خلال وسط بصري لاخطي تتم في أطار تغير المعاملات الفيزيائية لحزمة الليزر كالقدرة والشدة والطاقة ومعامل انتشار الحزمة وفقاً لمجموعات منفصلة من الإحداثيات هي الاحداثي القطبي والاحداثي الفضائي والاحداثي الزماني. إن سلوك المعاملات الخاصة بالتوافقي الثاني لا تختلف كثيراً عن المتذبذب الأساس إذ ان نبضة التوافقي تواجه وسط بصري لاخطي بنفس الخصائص تقريباً التي تبدأ بها العملية فيما تبدأ خصائص التوافقي الأعلى مرتبة بالاختلاف وبشكل ملحوظ. يعزى ذلك إلى تأثيرات الطاقة العالية لحزمة الليزر الأساس والناتجة عن التوافقي الثاني وكذلك الشدة البصرية التي يمكن أن تغير بعض معاملات الوسط البصري اللاخطي.

تقترب عملية التوليد التوافقي الثاني بتقليل أمد النبضة الناتجة وتصنيفها وفقاً لموقع الاحداثي الفضائي الذي تنتشر إليه النبضة الأساس ويتم الحصول عنده على أقصى قيمة لكفاءة التحويل الطاقوي تحت شرط تحقيق قانون حفظ الطاقة. إن هذه الدراسة يمكن أن تقدم وصفاً تحليلياً لعملية التوليد التوافقي الثاني يتضمن تأثيرات كل من خصائص حزمة الليزر وخصائص انتشارها وبعضاً من خصائص المادة وان هذا الوصف يمكن أن يتم دعمه أو تصحيحه من خلال النتائج العملية التي نأمل تحقيقها إذ أن التطبيقات الصناعية

References

- [1] Wang, Y. and Dragila, R., "Efficient conversion of picosecond laser pulses into SH frequency using group-velocity dispersion", *Phys. Rev. A*, Vol.41, 1990, p.5645.
- [2] Stabinis, A., Valinlis, G. and Ibragimov, E., "Effective sum frequency pulse compression in nonlinear crystal", *Opt. Commun.*, Vol.86, 1991, p.301.
- [3] Wang, Y. and Luther-Davies, B., "Frequency-doubling pulse compressor for ps high-power Nd laser pulse", *Opt. Lett.*, Vol.17, 1992, p.1459.
- [4] Chien, C.Y. *et al.*, "Highly efficient SHG of Ultra-intense Nd:Glass laser pulses", *Opt. Lett.*, Vol.20, 1995, p.353.
- [5] Umbrasas, A. *et al.*, "Generation of fs pulses through SH compression of the output of Nd: YAG laser", *Opt. Lett.*, Vol.20, 1995, p.2228.
- [6] Zhang, T., Kato, Y. and Daido, H., "Efficient THG of a ps laser pulse with time delay", *IEEE J. Quantum Electron.*, Vol.32, 1996, p.127.
- [7] Dubietis, A., Tamosauskas, G. and Varanavicius, A., "Femtosecond third-harmonic pulse generation by mixing of pulses with different duration", *Opt. Commun.*, Vol.186, 2000, p.211.

- [12] Moutzouris, K. *et al.*, *Opt. Lett.*, Vol.26, No.22, 2001, p.1785.
- [13] Loza-Alvarez, P. *et al.*, "Femtosecond SH pulse compression", *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol.18, 2001, p.1212.
- [14] Zeaiter, K. *et al.*, "Quasi-phase-matched SHG", *Opt. Lett.*, Vol.28, No.11, 2003, p.911.
- [15] Moutzouris, K. *et al.*, "Efficient SHG in birefringently phase matched GaAs waveguides", *Opt. Lett.*, Vol.26, No.22, 2001, p.1785.
- [8] Smith, A. and Bowers, M. "Phase distortions in sum and difference-frequency mixing in crystals", *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol.12, 1995, p.49.
- [9] Smith, A. *et al.*, "Comparison of a numerical model with measured performance of a seeded ns KTP OPO", *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol.12, 1995, p.2253.
- [10] Cao, Q and Deng, X., "Spatial parametric characterization of general polychromatic beams", *Opt. Commun.*, Vol.142, 1997, p.135.
- [11] Moutzouris, K. *et al.*, "Second Harmonic Generation", *Private communications*, 2004.